טורי טיילור ומקלורן

עד עכשיו זיהינו בכל מיני דרכים פונקציות עם טורי חזקות מתאימים. האם ישנה דרך שיטתית בהנתן פונקציה להגדיר טור חזקות סביב נקודה כלשהי x_0 שמתכנס לפונקציה בתחום מסויים? (דיון) ראשית, ברור שמתקיים:

תנאי הכרחי לקיום טור כזה בתחום הוא שהפונקציה גזירה אינסוף פעמים ברציפות בתחום.

נניח שהפונקציה מקיימת את התנאי ההכרחי, ושקיים טור כזה, אזי ניתן לכתוב $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$. מה יכולים להיות מקדמי הטור? הביטוי למקדמי הטור מתקבל מיידית ע"י גזירה,

$f^{(n)}(x_0)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\Big|_{x=x_0}=n!a_n$, ובלבד שקיים טור בעל רדיוס התכנסות גדול מאפס שמתכנס לפונקציה, כי אז מותר להחליף את סדר הסכימה והגזירה.

מסקנה: אם קיים טור חזקות שמתכנס לפונקציה נתונה $f(x)$ בתחום מסוים, אז הוא יחיד והביטוי למקדמי הטור נתון ע"י $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

הגדרה: תהי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בסביבה של נקודה x_0 . הטור $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ייקרא טור טיילור של הפונקציה $f(x)$ סביב x_0 (לרשימה).

הגדרה: טור טיילור של פונקציה סביב הראשית ייקרא טור מקלורן (או טור טיילור בקיצור; לרשימה).

דוגמה: נתונה פונקציה שמתאפסת זהותית בסביבה קטנה של x_0 מהו טור טיילור שלה?

תשובה: טור טיילור שלה שווה לאפס זהותית.

עד עכשיו דיברנו רק על תנאים הכרחיים להתכנסות הטור. נשאלות אם כך השאלות הבאות:

מה רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של פונקציה נתונה?

האם/באילו תנאים טור טיילור מתכנס, מתכנס לפונקציה שהגדירה אותו?

מסתבר שייתכן שפונקציה תהיה מוגדרת בתחום אבל הטור טיילור שמוגדר באמצעותה לא יתכנס בכל התחום.

ייתכן אפילו שרדיוס ההתכנסות של טור טיילור יהיה אפס. למשל, $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{1+x^2y}dy$ (תזכורת: ביטוי כללי של גזירה מתחת לסימן האינטגרציה $\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)dt=b'(x)f\left(x,b(x)\right)-a'(x)f\left(x,a(x)\right)+\int_{a(x)}^{b(x)}\partial_x f(x,t)dt$.

הביטוי נכון כל עוד f,f_x רציפות כפונקציות של שני משתנים; הוכחה ע"י שימוש בפונקציה קדומה). האינטגרל מתכנס, ולכן הפונקציה מוגדרת לכל $x\in\mathbb{R}$, לפי מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים חיוביים. אבל הטור טיילור שמתקבל מהפונקציה, כמו שאפשר לבדוק מגזירה פרמטרית של האינטגרנד, נותן $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!x^{2n}$ בעל רדיוס התכנסות אפס.

מה הסיבה האמיתית להתנהגות הזו? בעיה במישור המרוכב: הצבה של x מדומה קטן כרצוננו מובילה לאינטגרל שאינו מתכנס.

כעת נניח שהטור מתכנס. האם הוא בהכרח מתכנס לפונקציה? נבחן דוגמה:

תהי $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. כל הנגזרות בנקודות שאינן אפס קיימות ואפשר להראות באינדוקציה שמתקיים, , $f^{(n)}(x)=P_{3n}(1/x)e^{-1/x^2}$ עבור פולינום כלשהו $P_{3n}(1/x)$, למשל $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$. כעת

ניתן להוכיח שכל הנגזרות בראשית קיימות ושוות לאפס ע"י שימוש בהגדרת הנגזרת והפעלה מספיק פעמים של משפט לופיטל (עבור $\frac{1/x}{\exp(1/x^2)}$). כרגיל, האקספוננט מנצח כל פולינום. לכן <u>טור טיילור של הפונקציה הזו קיים ושווה זהותית לאפס</u>. כלומר <u>הטור שונה מהפונקציה שהגדירה אותו בכל נקודה מלבד בראשית</u>.
מה גורם להתנהגות המוזרה הזו? איפה הבעיה בפונקציה הזו? התשובה שוב: במישור המרוכב. אם נציב $x = i\,y$ נראה שלא קיים גבול לפונקציה בכיוון המדומה, ולכן היא אפילו לא רציפה בראשית במובן המרוכב.
אגב, אם <u>נצייר</u> את גרף הפונקציה $f(x)$ תגלו שהוא מאד שטוח בראשית. למעשה הוא שטוח יותר מכל פולינום אפשרי וזו עוד סיבה לכך שטור טיילור שלו יוצא זה של פונקציית האפס. מבין כל הפולינומים האפשריים מסדר נתון הפולינום שמתאפס זהותית מהווה את הקירוב הטוב ביותר לפונקציה הזו.

אז מה בכל זאת אפשר להגיד על ההתכנסות של הטור ועל מידת הקירוב שהוא נותן לפונקציה נתונה?

כדי לענות על זה נשים לב לכך ש<u>סדרת הסכומים החלקיים של טור טיילור הם פולינומי טיילור</u> שהכרתם באינפי' 1, $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. עוד הגדרנו באינפי' 1 <u>שארית טיילור מסדר</u> n ע"י $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$.

<u>התכנסות של טור טיילור בסביבה</u> D <u>של</u> x_0 <u>שקולה לתנאי</u> $\forall x\in D,\ R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

ניזכר גם בביטוי שהיה לנו עבור השארית, <u>שארית לגראנז'</u>, $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

במה עוזר לנו הביטוי הזה? התשובה נמצאת במשפט נוסף שמסתמך על צורת השארית הזו.

<u>משפט</u>: תהי $f(x)$ גזירה אינסוף פעמים בסביבה D של x_0, כך שקיים M שמקיים $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in D\ \left|f^{(n)}(x)\right|<M$, אזי טור טיילור של $f(x)$ מתכנס ל- $f(x)$ ב- D.

<u>הוכחה</u>: מתקיים $\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\tilde{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|<\frac{M(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ ולכן $T_n(x)=f(x)-R_n(x)\to f(x)$.

<u>מסקנה</u>: טור טיילור של פולינום מסדר N מתכנס לפולינום. למעשה פולינום טיילור מסדר N זהה לפולינום המקורי.
<u>הוכחה</u>: השארית בסדר N ומעלה תלוייה בנגזרת מסדר של לפחות $N+1$ ונגזרות אלו מתאפסות זהותית לפולינום מסדר N.

<u>דוגמה</u>: לפתח פולינום ממעלה שנייה סביב 2 נקודות שונות, ואז לפתוח סוגריים ולהראות שמזדהה.

<u>מסקנה</u>: טור טיילור של סינוס קוסינוס ואקספוננט מתכנס בכל הישר הממשי.
<u>הוכחה</u>: בכל קטע סגור הנגזרות חסומות. לשתי הפונקציות הטריגונומטריות הן חסומות מיידית על כל הישר. לאקספוננט הן חסומות בכל קטע סופי, וזה גם מספיק.

שימו לב ש<u>כל נגזרת כשלעצמה חייבת להיות חסומה בקטע סגור</u>, כי הפונקציה גזירה אינסוף פעמים ולכן רציפה, ולכן מקבלת ערכי קיצון בקטע סגור. החכמה במשפט היא שאותו חסם טוב לכל הנגזרות, לכמות אינסופית שלהן.

<u>דוגמה</u>: לפתח $\sin x$ סביב הראשית להראות שמתקבלים הפיתוחים הקנוניים. לפתח e^x סביב נקודה כלשהי. להראות שמתקיים $e^{a+b}=e^a e^b$. ניתן לחשוב על הטור כעל ***הגדרה*** של האקספוננט לכל מספר ממשי (ואפילו מרוכב) ואז אין שום בעיה עם להגדיר את ערך הביטוי לארגומנט לא רציונלי ושאר העניינים שהטרידו אותנו באינפי' וחוקי החזקות מתקבלים מיידית כמו שראינו עכשיו.

השארית שימושית לא רק להוכחת התכנסות אלא גם לאנליזה נומרית של הקרוב. כמה איברים צריך כדי להעריך את $\sin 1\simeq 0.84147$ בדיוק של עד המקום העשרוני השני? (כלומר עד ± 0.005). $(n+1)!>1/0.005=200$ מתקיים החל מ- $n=6$ (3 איברים). אם נחשב $\sin 7$ נקבל שצריך הרבה יותר ספרות. מבחינת אנליזה נומרית ישנה שיטה הרבה יותר יעילה (<u>הצעות</u>?): $\sin 7=\sin(7-2\pi)$, וכעת מספיק אותו מספר מחוברים כמו ל- $\sin 1$.

טורי טיילור מוכרים ותחומי ההתכנסות שלהם

נחשב ונכתוב מספר טורים שימושיים:

$$,e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty$$

$$,\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty$$

$$,\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty$$

$$,\sinh x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty$$

$$,\cosh x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots,\ -\infty<x<\infty$$

$$,\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+x^3+\ldots,\ -1<x<1$$

$$,\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,\ -1<x\le 1$$

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,\ -1\le x\le 1$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!}x^k+\ldots,\ m\in R,$$

$$m\ge 0,\Rightarrow -1\le x\le 1,\ -1<m<0,\Rightarrow -1<x\le 1,\ m\le -1,\Rightarrow -1<x<1.$$

<u>ניתן להשתמש בטורים האלה ובתכונות האלגבריות השונות של טורי חזקות שלמדנו כדי להעריך טורי טיילור נוספים</u> מבלי לחשב אותם מפורשות.

כמו כן, <u>ניתן ע"י הצבה של ערכים ספציפיים עבור</u> x <u>לקבל תוצאות של טורי מספרים שונים</u>.

<u>דוגמה</u>: מהו פיתוח טיילור ומה תחום ההתכנסות של $f(x)=\ln(1+2x^2)$.

<u>פתרון</u>: אפשר לנסות לפתור ע"י גזירה ושימוש בביטוי הכללי, אבל חישוב הנגזרות הכללי יהיה מסובך (<u>להדגים</u>).

במקום זה נציב $u=2x^2$ ונקבל $f(x)=\ln(1+u)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{k+1}x^{2k+2}}{k+1}$. תחום ההתכנסות הוא $-1<u\le 1$. המשתנה u תמיד חיובי והערך העליון $u=1$ מתקבל עבור $x=\pm 1/\sqrt{2}$. לכן תחום ההתכנסות ביחס למשתנה x הוא $x\in[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$.

<u>דוגמה</u>: מהו טור טיילור של $\frac{1}{(1-x)^2}$?

<u>פתרון</u>: שוב, חישוב ישיר באמצעות הנוסחה הכללית לטור יוביל לביטויים לא נעימים. נפתור בשתי דרכים. <u>דרך ראשונה</u>, נכתוב $\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=(1+x+x^2+\ldots)(1+x+x^2+\ldots)$. כעת נאסוף את המקדמים של x^n, כלומר נפתור בעיה קומבינטורית. עבור n נתון המקדם של x^kx^{n-k} ממכפלת שני הסוגריים הוא 1 ללא תלות ב- k שיכול סה"כ לקבל $n+1$ ערכים שונים, מאפס ועד n. למשל, x^2 מתקבל משלוש המכפלות $x^2\cdot 1, x\cdot x, 1\cdot x^2$ - סה"כ 3 פעמים. לכן הטור המתקבל יהיה $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.

<u>דרך שניה</u>: נשים לב שמתקיים $\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=\frac{d}{dx}(1+x+x^2+\ldots)=(1+2x+3x^2+\ldots)$. תוצאה זהה

לקודמת. ניתן כמובן לשלב את השיטות השונות שהדגמנו.

<u>דוגמה</u>: $f(x)=\frac{2x^3}{(1-4x^2)^5}$. מהו טור טיילור של הפונקציה סביב הראשית ומהו תחום ההתכנסות?

<u>פתרון</u>: ראשית נשים לב שהביטוי נתון כמכפלה של שתי פונקציות. במונה יש פונקציה שטור טיילור שלה כולל איבר יחיד ורדיוס ההתכנסות הוא אינסוף. לכן רדיוס ההתכנסות יהיה שווה לזה של הפונקציה $g(x)\equiv\frac{1}{(1-4x^2)^5}$. כדי למצוא את הטור המתאר פונקציה זו נמצא קודם את הטור

$h(u)=\frac{1}{(1-u)^5}=\frac{1}{4!}\left(\frac{d}{du}\right)^4\frac{1}{1-u}=\frac{1}{4!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{du}\right)^4u^n=\frac{1}{24}\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)u^{n-4}$. כעת נציב

$g(x)=\frac{1}{24}\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)4^{n-4}x^{2n-8}=\frac{1}{24}\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)4^nx^{2n}$, ומכאן

$f(x)=\frac{2x^3}{(1-4x^2)^5}=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)4^nx^{2n+3}$.

<u>שאלת המשך</u>: מהו הערך בראשית של הנגזרת ה- 13 של הפונקציה $f(x)$ מהדוגמה הקודמת?

<u>פתרון</u>: טור טיילור של הפונקציה שלנו נתון ע"י $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. אם נסמן את מקדמי הטור ע"י c_n אז $c_{13}=\frac{f^{(13)}(0)}{13!}$ ולכן הנגזרת ה- 13 נתונה ע"י $f^{(13)}(0)=13!c_{13}$. הערך של c_{13} הוא המקדם של $n=5$ בטור כפי שכתבנו אותו, כלומר $c_{13}=\frac{1}{12}(5+4)(5+3)(5+2)(5+1)4^5=258,048$ והנגזרת המבוקשת נתונה ע"י: $f^{(13)}(0)=1,606,870,263,398,400$.

טורי פונקציות וסדרות של פונקציות

אנחנו חוזרים עכשיו לנושא הכללי של טורי פונקציות. הגדרנו כבר <u>טור פונקציות</u> $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ וציינו ש<u>הטור מתכנס נקודתית בנקודה</u> x_0 <u>אם טור המספרים</u> $S(x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x_0)$ <u>מתכנס</u>. יעניינו אותנו כעת שאלות לגבי התחום בו טור פונקציות מתכנס ו***סוגי ההתכנסות*** – נראה שאפשר להגדיר עוד סוגי התכנסות מלבד ההתכנסות הנקודתית. השאלות האלה רלוונטיות גם לדברים שכבר הזכרנו לגבי טורי חזקות וגם לגבי מה שנלמד בהמשך על טורי פורייה.

למעשה, כשם שיש טורי פונקציות יש גם סדרות של פונקציות, ו<u>התכנסות של טור פונקציות זהה להתכנסות סדרת הסכומים החלקיים שלו</u>.

נתחיל מלכתוב בצורה המפורשת ביותר את הגדרת <u>ההתכנסות לסדרות של פונקציות</u>:

<u>הגדרה</u>: תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות, נאמר ש<u>הסדרה מתכנסת נקודתית</u> לפונקציה $f(x)$ בתחום E אם: $\forall x\in E,\forall\varepsilon>0,\exists N:\forall n>N,\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

זו בדיוק ההגדרה של התכנסות נקודתית ב- x_0 שהזכרנו כבר, אבל עכשיו אנחנו מדברים לא על נקודה שבה יש התכנסות נקודתית אלא על הקבוצה כולה שבה יש התכנסות נקודתית.

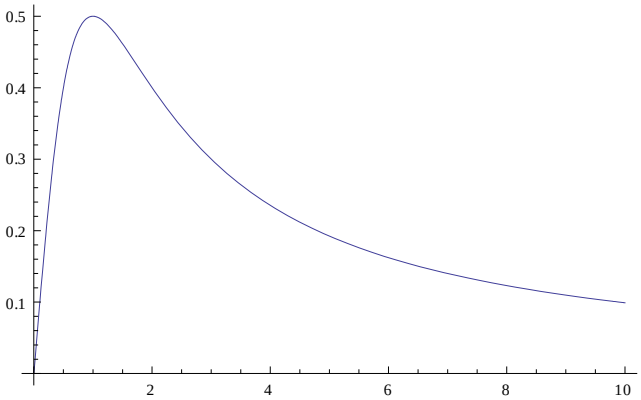
<u>הגדרה</u>: תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות, נאמר ש<u>הסדרה מתכנסת במידה שווה</u> (<u>לרשימה</u>) לפונקציה $f(x)$ בתחום E אם $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall x\in E:\forall n>N,\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$.

האם ברור מה ההבדל בין התכנסות נקודתית להתכנסות במידה שווה? איזו תכונה חזקה יותר ולמה?

לכאורה נראה שכתבנו פעמיים את אותו הדבר. אבל כשבוחנים את הסדר בו הביטויים השונים כתובים רואים שבהתכנסות נקודתית $N(x,\varepsilon)$ ואילו בהתכנסות במידה שווה $N(\varepsilon)$ בלבד. כלומר <u>בהתכנסות במידה שווה לכל הנקודות בתחום בהנתן</u> ε <u>ניתן לבחור את **אותו הערך** של</u> N. ייתכן כמובן שיש נקודות שניתן לבחור עבורן "ערך חסכוני", כלומר קטן יותר, של N, אבל הנקודה היא שקיים איזשהו ערך שמתאים לכל הנקודות, ושזה קורה לכל בחירה של ε קטן כרצוננו. לכן, <u>התכונה של התכנסות במידה שווה היא תכונה חזקה יותר מהתכנסות נקודתית</u>.

<u>מסקנה</u>: סדרת פונקציות שמתכנסת במידה שווה בקבוצה מתכנסת נקודתית בקבוצה.

<u>הוכחה</u>: אם נתון $N(\varepsilon)$ נגדיר $N(x,\varepsilon)=N(\varepsilon)$.



האם גם ההפך נכון? נתבונן ב<u>דוגמה</u> הבאה:

<u>דוגמה</u>: נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+(nx)^2}$ בתחום $[0,1]$. <u>האם הסדרה מתכנסת בתחום</u>? אם כן, האם היא מתכנסת במידה שווה (<u>לצייר</u> עבור $u=nx$)?

<u>פתרון</u>: עבור $x=0$ מתקבלת סדרת אפסים שמתכנסת לאפס. לכל נקודה אחרת בתחום מתקיים $0\le f_n(x)\le \dfrac{nx}{(nx)^2}=\dfrac{1}{nx}\to 0$, ולכן $S_n(x)\to 0$ בכל התחום.

האם ההתכנסות הזו היא במידה שווה? נתבונן בסדרת הנקודות הבאה, $x_n=\dfrac{1}{n}$. מתקיים $S_n(x_n)=1/2$. לכן, עבור $\varepsilon<1/2$ אין שום אפשרות למצוא N שמעליו $\forall x, S_n(x)<1/2$ וסדרת הפונקציות לא מתכנסת במידה שווה (<u>שאלות</u>?).

אבל לשם מה הגדרנו בכלל את המושג של רציפות במידה שווה? מה הוא מלמד אותנו (<u>הצעות</u>?)? מוטיבציה עיקרית להגדרה הזו נותן המשפט הבא:

<u>משפט</u>: תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות <u>רציפות</u>, המתכנסות <u>במידה שווה</u> בתחום E לפונקציה $f(x)$, אזי $f(x)$ רציפה.

<u>הוכחה</u>: יש להראות שמתקיים $\forall x_0\in E,\forall\varepsilon,\exists\delta:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. נניח אם כך שנבחרו כבר x_0,ε ונבחר δ מתאים. נכתוב (<u>לצייר</u> פונקציה ופונקציות שמתקרבות אליה ואת שלושת המחוברים):

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\left(f(x)-f_n(x)\right)+\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)+\left(f_n(x)-f(x_0)\right)\right|\le$$
$$\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|$$

לא אמרנו איזה ערך של n אנחנו לוקחים. אנחנו רוצים לבחור ערך מספיק גבוה כך שהמעבר מהפונקציה הגבולית חזרה לסדרה לא ישנה הרבה. לשם כך נחסום את המחובר הראשון והשלישי בעזרת ההתכנסות במידה שווה ע"י $\varepsilon/4$, כלומר נבחר n מספיק גדול כך ששני המחוברים מקיימים $|f(x)-f_n(x)|,|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon/4$.

ברור היכן השימוש בהתכנסות במידה שווה? אנחנו יודעים מי זה x_0 אבל לא יודעים מי זה x וייתכן היה שקיימים x-ים בכל סביבה של x_0 שעבורם צריך לבחור n-ים יותר ויותר גדולים. ההתכנסות במידה שווה מאפשרת לנו להתקדם כאן גם בלי לדעת בדיוק מיהו x כי ניתן לבחור את אותו ה- n לכולם.

כעת נשאר לטפל רק במחובר השני. אבל זהו ביטוי שכולל הפרש בין שני ערכים של פונקציה שידוע לנו מההנחה שהיא רציפה, ולכן $\exists\delta>0$ שמקיים $|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon/2$. כעת בסה"כ הביטוי נותן לנו $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/4+\varepsilon/2+\varepsilon/4=\varepsilon$ כנדרש.

שאלה: האם גם ההפך נכון? <u>האם סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה רציפה בהכרח מתכנסת במידה שווה</u> (<u>הצעות</u>)? התשובה שלילית, והדוגמה הקודמת ($f_n(x)=\dfrac{nx}{1+(nx)^2}$) מוכיחה את זה.

אז אולי תמיד התכנסות של פונקציות רציפות היא לפונקציה רציפה גם אם ההתכנסות היא לא במידה שווה?

לא, דוגמה נגדית: $f_n(x)=\frac{1}{1+nx}$ בתחום $x\ge 0$ (כדי שהביטוי יהיה מוגדר לכל x בתחום; לצייר עבור $u=nx$; הגדלת n זה שינוי סקאלה בציר ה- x). מתקיים $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x>0\end{cases}$.

המשפט לגבי הרציפות הוא רק אחד המשפטים שמראים לנו את התכונות הטובות של התכנסות במידה שווה. באופן דומה להוכחת המשפט על הרציפות ניתן להוכיח את המשפטים הבאים:

משפט: תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות רציפות, המתכנסות במידה שווה בקטע $[a,b]$ לפונקציה $f(x)$, אזי $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

שימו לב: אין צורך לטעון במשפט שהאינטגרל קיים, כי הוכחנו כבר שהפונקציה הגבולית רציפה ופונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית.

משפט: תהי $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות, המתכנסות בקטע $[a,b]$ לפונקציה $f(x)$, וגם מתקיים שסדרת הנגזרות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת בקטע במידה שווה לפונקציה $g(x)$, אזי $f(x)$ גזירה ברציפות ומתקיים $f'(x)=g(x)$. כמו כן, הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה.

אנחנו יודעים שסדרות מספרים שקולות לטורי מספרים. בדיוק באותו האופן ניתן להגדיר טורי פונקציות מתוך סדרות של פונקציות ולהפך. נכתוב כעת את ההגדרות המתאימות לטור פונקציות:

הגדרה: טור הפונקציות $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מוגדר כגבול של סדרת הפונקציות $S_N(x)=\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$, בפרט הטור מתכנס אם"ם סדרת הפונקציות $S_N(x)$ מתכנסת.

הגדרה: נאמר שטור הפונקציות $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה אם סדרת הפונקציות (סדרת הסכומים החלקיים) $S_N(x)$ מתכנסת במידה שווה.

ספציפית המשפטים שהראנו קודם אומרים שעבור טור פונקציות רציפות שמתכנס במידה שווה ההתכנסות היא לפונקציה רציפה וניתן לגזור ולחשב אינטגרל ולהפוך את הסדר של הסכימה ושל האינטגרציה או הגזירה.

שימו לב, זהו הבסיס להוכחות של המשפטים שכתבנו ללא הוכחה לגבי שינוי סדר גזירה וסכימה או אינטגרציה וסכימה בטור חזקות. מתבוננים בסדרת הסכומים החלקיים וכל מה שנותר להוכיח זה שטורי חזקות מתכנסים במידה שווה. אבל איך נוכיח שטור חזקות מתכנס במידה שווה? ובאופן כללי יותר האם יש דרך להוכיח בצורה פשוטה, שלא ע"פ הגדרה, שטור פונקציות מתכנס במידה שווה? כמובן שיש:

מבחן M של ויירשטראס: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ טור פונקציות בתחום E, ויהי $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ טור מספרים חיובי מתכנס שמקיים $\forall x\in D, |f_n(x)|\le M_n$, אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב- E.

הוכחה: לערך נתון של x, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ הוא טור מספרים. הערכים המוחלטים של אברי טור המספרים מקיימים מהנתון $|f_n(x)|\le M_n$ ולכן, ממבחן ההשוואה, טור הערכים המוחלטים מתכנס, כלומר הטור המקורי מתכנס בהחלט ולכן מתכנס. כעת נותר למצוא $N(\varepsilon)$ שאינו תלוי ב- x שיקיים: $\forall n>N, |S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$. נבחר את ה- $N(\varepsilon)$ של טור המספרים, אזי מתקיים $|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|\le \sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k(x)|\le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k<\varepsilon$.

<u>מסקנה</u>: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ טור חזקות סביב x_0 בעל רדיוס התכנסות R, אזי הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור מהצורה $[x_0-a, x_0+a]$ לכל $0<a<R$.

<u>הוכחה</u>: ניקח בה"כ $x_0=0$ ונבחר $M_n=|c_n|a^n$ אזי מתקיים התנאי של מבחן M, $\forall x\in[-a,a], |c_n x^n|\le M_n$ וטור המספרים מתכנס, כי בכל נקודה פנימית לרדיוס ההתכנסות טור חזקות מתכנס בהחלט.

שימו לב שמה שעשינו לא יכול להצדיק התנהגות טובה בנקודות הקצה $\pm R$ אם במקרה הטור מתכנס באחת מהן או בשתיהן, ובמשפטים שציטטנו טענו לרציפות מצד אחד גם במקרה הזה, שמצדיקה גם אינטגרציה עד לנקודת הקצה, יש צורך במשפט בשם <u>משפט אבל</u>, שמצדיק את הרציפות מצד אחד בנקודת קצה בה ישנה התכנסות.

לפני שנעבור לנושא הבא אני רוצה להדגיש שוב, ש<u>***אין שום סיבה*** שתחום ההתכנסות לטור פונקציות כללי יהיה מוגדר ע"י רדיוס התכנסות</u>. זה מאפיין של טורי חזקות, לא של טורי פונקציות כלליים.
למעשה, בד"כ קשה למדי למצוא את תחומי ההתכנסות. מקרה יוצא דופן אחד הוא זה שבו ניתן להשתמש בהצבה ולקבל טור חזקות וראינו דוגמאות כאלה.

עוד הערה בהקשר של טורי פונקציות: משפט M של ויירשטראס שימושי מאד להוכחת התכנסות במידה שווה, והתכונה הזו מצידה שימושית מאד כדי להוכיח רציפות וגזירות של טור הפונקציות, אבל ראינו כבר מקרים בהם ההתכנסות היא לפונקציה רציפה למרות שההתכנסות איננה במידה שווה. באופן דומה, קיימים מקרים בהם ישנה התכנסות במידה שווה, אבל אי אשר להוכיח זאת ע"י מבחן ויירשטראס. כלומר ***מבחן ויירשטראס הוא תנאי מספיק להתכנסות במידה שווה, אבל איננו תנאי הכרחי***.

<u>דוגמה</u>: נבחן את טור הפונקציות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ עבור $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \frac{1}{2^{n+1}}<x\le\frac{1}{2^n}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ (<u>לצייר</u>: פונקציות ופונקציה גבולית). הטור מתכנס במידה שווה, כי עבור $\varepsilon>0$ נתון נבחר $N=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$ ונקבל:

$\forall n>N, \forall x\in[0,1], \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} f_n(x)\right|<\varepsilon$. מצד שני, אי אפשר לקבל קבועים M_n שיובילו לטור מתכנס, כי חייב להתקיים $M_n\ge\frac{1}{n}$ ואז הטור הקטן ביותר האפשרי למבחן M הוא הטור ההרמוני המתבדר.

אגב, ההתכנסות היא במידה שווה, אז למה הפונקציה הגבולית איננה רציפה? כי הפונקציות בטור אינן רציפות.